LYCEE SECONDAIRE
9 AVRIL 1938
Sidi Bouzid

Série 3
$3^{ème}$ Tech & Sci exp
2003-2004

EXERCICE N°1

On considère la suite U définie sur IN par: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \text{ pour tout} n \in IN \end{cases}$

1- Montrer que pour tout entier naturel n on a: $0 < Un \leq 1$
2- Montrer que pour tout entier naturel n on a: $Un+1-Un \leq 0$
3- On pose $Vn = \dfrac{1}{u_n}$
   a) Calculer V_0 et V_1
   b) Montrer que v est une suite arithmétique dont-on précisera sa raison
   c) Exprimer Vn en fonction de n puis Un en fonction de n
   d) Donner la valeur de $S = \sum_{k=0}^{10} v_k$

EXERCICE N°2

I-Soit U une suite géométrique de premier terme U_1 et de raison q tel que

$$\begin{cases} q < -1 \\ u_1 + 2u_2 + u_3 = 8 \\ u_1 u_2 u_3 = -216 \end{cases}$$

1-Calculer U_1 et q
2-Montrer que $Un = 2.(-3)^{n-1}$
3-Déterminer n pour que $\sum_{k=1}^{n} u_k = 122$

II- Soit V la suite définie sur IN*par : $\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{3}{2} v_n + u_n, n \in IN^* \end{cases}$

1-Calculer V_2 et V_3
2-On pose pour tout non nul $Wn = \dfrac{v_n}{u_n} + \dfrac{2}{9}$
  a-Montrer que W est une suite géométrique déterminer sa raison
  b-Exprimer Wn en fonction de n

EXERCICE N°3

On considère la suite U définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = u_{n-1} + n(-1)^{n-1}, n \in IN^* \end{cases}$

1-Calculer U_1,U_2 et U_3
2-Montrer que $U_{n+2} = U_n - (-1)^n$
3-Considérons les suites suivantes $V_p = U_{2p-1}$ et $W_p = U_{2p}$,pour tout p non nul
  a- Calculer V_1,V_2,V_3, W_1,W_2etW_3
  b- Montrer que $W_{p+1} - W_p = -1$

c- Montrer que V_p+W_p est une suite constante ,en déduire que V est une suite arithmétique

EXERCICE N°4

Soit la suite u_n définie par $u_0 \in [0,2]$ et $u_{n+1}=\frac{2+8u_n}{7+u_n}$

1- Montrer que si $u_0=2$ alors la suite u est constante
2- On suppose que $u_0 \in [0,2[$
   a- Montrer que pour tout $n \in$ IN on a :$u_n \in [0,2[$
   b- Montrer que pour tout $n \in$ IN on a : $u_{n+1}>u_n$
3- Soit v la suite définie par : $v_n=\frac{-2+u_n}{1+u_n}$
   a- Montrer que v est une suite géométrique
   b- Exprimer v_n en fonction de n et u_0 , en déduire l'expression de u_n en fonction de n et u_0
   c- Donner $\lim_{n\to+\infty} v_n$, calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE N°5

Soit la suite U définir sur IN par : $U_0=2$ et $U_{n+1}=3U_n-(n^2+n)$ pour tout n dans IN

1- Calculer U_1 et U_2 . En déduire que U est ni arithmétique ni géométrique
2- Soit la suite V définie par : $V_n=U_n-\frac{1}{2}n^2-n-\frac{3}{4}$
   a- Montrer que la suite V est géométrique et préciser sa raison puis $\lim_{n\to+\infty} v_n$
   b- Exprimer V_n puis U_n en fonction de n
3- a- Calculer la somme $S=\sum_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de n
   b- Montrer par récurrence que pour out n entier naturel on a :
   $\sum_{k=0}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   c- En déduire la somme $S'=\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n

EXERCICE 6

Soit la suite w définie sur IN par :$w_n=(\frac{1}{2})^n+2n+1$

1- Calculer w_0,w_1,w_2 puis vérifier que w n'est ni arithmétique ni géométrique
2- Soit U la suite arithmétique tel que $U_3+U_4=16$ et $U_{11}=23$
   a) Déterminer la raison r et le premier terme de la suite U
   b) Exprimer Un en fonction de n
   c) Montrer que pour tout $n \in$IN on a : $\sum_{k=0}^{n} U_k=(n+1)^2$
3- Soit T la suite définie sur IN par $T_0=1$ et $T_{n+1}=\frac{1}{2}T_n+1$
   a) Calculer T_1,T_2 et T_3
   b) Montrer que pour tout $n \in$IN ;$T_n \geq 2$ en déduire que $T_{n+1}-T_n \leq 0$ pour tout $n \in$IN
   c) Soit la suite V définie sur IN par $V_n=T_n-2$
      - Montrer que V est une suite géométrique de raison q et de premier terme V_0

- Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$ calculer S_n en fonction de n ;Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = 2$

4- Vérifier que $W_n = U_n + V_n$ puis calculer $\sum_{k=0}^{10} W_k$

Exercice N°7

On définie la suite U définie sur IN* par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n \text{ ;} n \in IN^* \end{cases}$

1- Calculer u_2 et u_3 .Vérifier que u n'est ni arithmétique ni géométrique

2- Pour $n \in IN^*$ on définie la suite v par : $v_n = \frac{u_n}{n}$

   a) Montrer que v est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ dont-on précisera son premier terme

   b) Ecrire v_n à l'aide n puis montrer que $u_n = \frac{2n}{2^n}$

   c) donner $\lim_{n\to+\infty} v_n$ .Exprimer à l'aide de n la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$,puis calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$